

Lösen von Exponentialgleichungen

Beispiele:

1. $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ "Probieren"

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

3. $2^{3x-2} = 2^7$ "Exponentenvergleich"
 $\Rightarrow 3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$

4. $5^x = 30$

Auflösen nach x liefert:

$x = \log_5 30$ (Logarithmus von 30 zur Basis 5)

Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)

$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0,47712$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)

$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1,0986$

Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von lg bzw. ln:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2,1133$

Aufgaben:

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,2$ ☐

2 $2^{x-1} = 35$ ☐

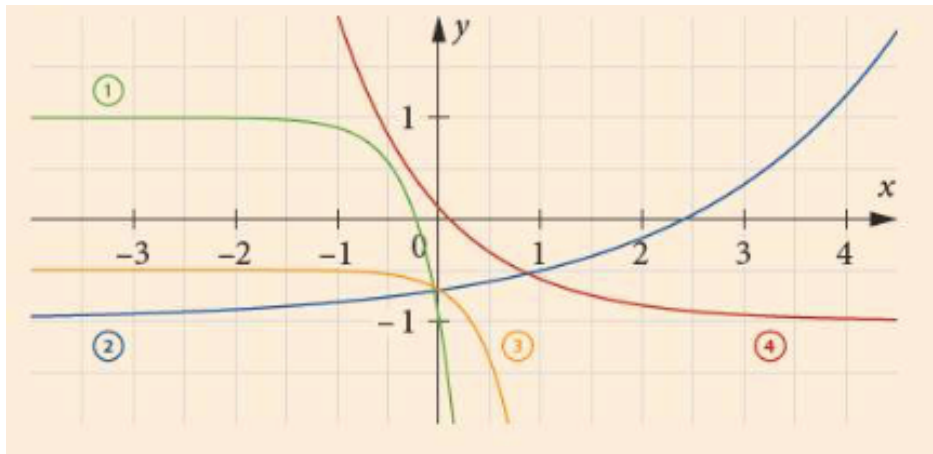
3 $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$ ☐

4 $4^{3z-2} = 4^{z+1}$ ☐

5 $e^{5x} + 5 = 5e^{5x}$ ☐

- 6 Berechnen Sie Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.
Ordnen Sie mithilfe der Ergebnisse jeden Funktionsterm dem richtigen Graphen zu. ☐

$f(x) = -2e^{3x} + 1$ $g(x) = 0,3e^{0,5x} - 1$ $h(x) = -0,2e^{x-1} - 0,5$ $k(x) = 3e^{-x-1} - 1$



- 7.0 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 8e^{-x} - 3$ und $g(x) = 3 - e^x$.

- 7.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen mit den Koordinatenachsen. ☐

- 7.2 Zeichnen Sie die beiden Graphen für $-1 \leq x \leq 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. ☐

- 7.3 Ermitteln Sie rechnerisch die gemeinsamen Punkte beider Graphen. ☒

- 8 Gegeben ist die Gleichung $e^x + e - a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie, für welche Werte von a diese Gleichung nicht lösbar ist. ☒

- 9 Die Krebszellen einer Ratte in einem Versuchslabor vermehren sich gemäß der Funktion f mit $f(t) = 2e^{1,6094t}$, wobei $t \geq 0$ den Zeitpunkt in Tagen und $f(t)$ den Bestand der Krebszellen zum Zeitpunkt t angibt. Sobald 8500 Krebszellen entstanden sind, soll der Ratte ein Zusatzmedikament injiziert werden. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt. ☐
- 10.0 Der Abbau eines Medikaments im Körper eines Menschen folgt der Funktion f mit $f(t) = 100e^{-0,125t}$ für $t \geq 0$ (t in Tagen nach Beginn der Einnahme und $f(t)$ die Konzentration des Medikaments im Blut in mg).
- 10.1 Beschreiben Sie, woran Sie am Funktionsterm erkennen, dass es sich um einen Zerfallsprozess handelt. ☐
- 10.2 Berechnen Sie, wie hoch die Konzentration des Medikaments im Körper nach 10 Tagen ist. ☐
- 10.3 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Konzentration erstmals unter 10 mg gesunken ist. ☐
- 11 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2019 Teil 1)
 $e^{x^2} = e^{2x-1}$. ☐
- 12 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2022 Teil 1)
 $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$ ☒
- 13 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.
 $(e^x)^2 - 25 = 0$ ☒

Lösungen:

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,2$$

$$x = \log_{0,5} 0,2 \approx 2,3219$$

$$2. 2^{x-1} = 35$$

$$x-1 = \log_2 35 \Rightarrow x = \log_2 35 + 1 \approx 6,1293$$

$$3. \frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$$

$$5^{y+2} = 1000 \Rightarrow y+2 = \log_5 1000 \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2,2920$$

$$4. 4^{3z-2} = 4^{z+1}$$

$$3z-2 = z+1 \Rightarrow 2z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$$

$$5. e^{5x} + 5 = 5e^{5x} \Rightarrow 4e^{5x} = 5 \Rightarrow e^{5x} = 1,25 \Rightarrow x = \frac{\ln(1,25)}{5} \approx 0,045$$

6

$$f: (1) \quad f(0) = 1 - 2e^{3x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{\ln(0,5)}{3} \approx -0,23$$

$$S_y(0|1) \quad N(-0,23|0)$$

$$g: (2) \quad g(0) = -0,7 \quad 0,3e^{0,5x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{0,5x} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{0,5} \approx 2,41$$

$$S_y(0|-0,7) \quad N(2,41|0)$$

$$h: (3) \quad h(0) = -0,57 \quad -0,2e^{x-1} - 0,5 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = -2,5 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$$S_y(0|-0,57)$$

$$k: (4) \quad k(0) = 0,10 \quad 3e^{-x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow -x-1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = -1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,1$$

$$S_y(0|0,10) \quad N(0,1|0)$$

7.1

$$f(0) = 5 \Rightarrow S_y(0/5)$$

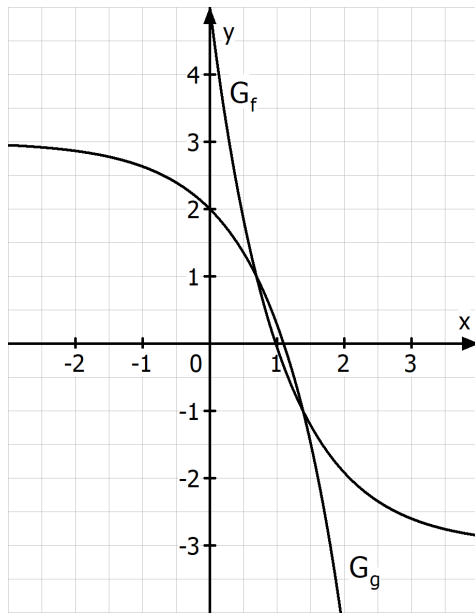
$$8e^{-x} - 3 = 0 \Rightarrow 8e^{-x} = 3 \Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\ln \frac{3}{8}}{1} \approx 0,98 \Rightarrow N(0,98/0)$$

$$g(0) = 3 \Rightarrow S_y(0/3)$$

$$3 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \approx 1,10 \Rightarrow N(1,10/0)$$

7.2



7.3

$$8e^{-x} - 3 = 3 - e^x \Rightarrow 8e^{-x} + e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 8 = 0$$

$$\text{Substitution: } z = e^x$$

$$\Rightarrow z^2 - 3z + 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 2 \quad z_2 = 4$$

Resubstitution:

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \quad e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$\Rightarrow S_1(\ln 2 / 1) \quad S_2(\ln 4 / -1)$$

$$8 \quad e^x + e - a = 0 \Rightarrow e^x = a - e \Rightarrow \text{keine Lösung, wenn } a - e < 0 \Rightarrow a < e$$

$$9 \quad 2 \cdot e^{1,6094t} = 8500 \Rightarrow e^{1,6094t} = 4250 \Rightarrow 1,6094t = \ln(4250) \Rightarrow t = \frac{\ln(4250)}{1,6094} \approx 5,19 \text{ Tage}$$

10.1 Da $c = -0,125 < 0$ ist, handelt es sich um einen Zerfallsprozess.

$$10.2 \quad f(10) \approx 28,65 \text{ mg}$$

10.3

$$100e^{-0,125t} < 10 \Rightarrow e^{-0,125t} < 0,1 \Rightarrow -0,125t < \ln(0,1) \Rightarrow t > \frac{\ln(0,1)}{-0,125} \approx 18,42$$

Nach 18,42 Tagen ist die Konzentration des Medikaments
im Körper unter 10 mg gesunken.

$$11 \quad e^{x^2} = e^{2x-1} \Rightarrow x^2 = 2x-1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

12

$$\begin{aligned} (e^x - 2)^2 - 4 &= 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x = 0 \\ \Rightarrow e^x(e^x - 4) &= 0 \quad e^x = 0 \text{ (f)} \quad e^x - 4 = 0 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4) \end{aligned}$$

$$13 \quad (e^x)^2 = 25 \Rightarrow 1) e^x = -5 \text{ geht nicht} \quad 2) e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$$